第 10 講　実践演習問題 第３問〜第５問

第３問 （選択問題）

大相撲では，しばしば巴戦により優勝決定が行われている。

花子さんと太郎さんは確率を利用して，優勝者が決まる確率について考えてみることにした。

今回は，A，B，C の 3 人が以下のルールに従って優勝決定戦を行う。

《ルール》

・ 1 回戦は A と B が対戦する。2 回戦は 1 回戦の勝者と C が対戦する。

・以下同様に，対戦ごとの勝者と控えの者が次の対戦を行うものとする。

・だれかが 2 連勝した時点で，その者が優勝者とする。

ただし，各対戦において，どちらかが勝つ確率は等しく $\frac{1}{2}$ とする。

(1)　2 回戦で優勝者となることができるのは，[ア] である。[ア] に当てはまるものを次の⓪〜⑥のうちから一つ選べ。

⓪　A だけ　①　B だけ　②　C だけ　③　A，B

④　B，C　⑤　A，C　⑥　A，B，C

また，2 回戦で優勝者が決まる確率は，$\frac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}$ である。

(第３問は次ページに続く。)

(2) 3回戦で優勝者となることができるのは，[エ] である。[エ] に当てはまるものを次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ A　① B　② C　③ A，C
④ B，C　⑤ A，B，C

また，3回戦で優勝者が決まる確率は，$\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$ である。

したがって，3回戦以内に優勝者が決まる確率は，$\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ である。

(第3問は次ページに続く。)

4回戦以上で優勝者が決まることについて，花子さん，太郎さんは次のような話をした。

> 花子：巴戦では優勝するための条件に差はあるのかな？
> 太郎：今考えているA，B，Cの3人での場合でも，1回戦から出場するAもしくはBの方が優勝する確率はCより高そうだね。
> 花子：じゃあ，4回戦以降も試合が続く場合を考えてみようよ。

(3) 4回戦まであった場合，4回戦に出場できないのは［ケ］である。［ケ］に当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

⓪ A　① B　② C　③ A，C
④ B，C

4回戦で優勝者が決まる確率は，$\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$である。

(4) 5回戦が終了した時点で優勝者が決まっていない場合，6回戦で対戦するのは［シ］または［ス］である。［シ］，［ス］に当てはまるものを，次の⓪～②のうちから一つずつ選べ。ただし，解答の順序は問わない。

⓪ AとB　① BとC　② AとC

5回戦が終了した時点で優勝者が決まっていないときの確率は，$\dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソタ}}$である。

(第3問は次ページに続く。)

(5) 5 回戦以内に A が優勝者と決まる確率は，$\dfrac{\boxed{チツ}}{\boxed{テト}}$ である。

A，B，C の 3 人のうち，5 回戦以内に優勝する確率が最も高いのは，$\boxed{\quad ナ \quad}$ である。$\boxed{\quad ナ \quad}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ A　　① B　　② C　　③ A，B

④ A，C　　⑤ B，C

第４問 （選択問題）

ある商品開発で，A，B，C の新商品を考えて，次のような条件で試行販売をした。下記はその結果である。これをもとにして，花子さんと太郎さんは，3 つの新商品 A，B，C の売れた個数をそれぞれ求めてみた。

・新商品 A，B，C はそれぞれ 1000 円，600 円，200 円で販売した。 ・売上高は合計で 52600 円であった。 ・新商品 B の売れた個数は，新商品 C の売れた個数の 2 倍より 1 個少なかった。 ・売れなかった商品はなかった。

(1) 花子さんは，新商品 A，B，C の売れた個数をそれぞれ x 個，y 個，z 個とし，売上高が 52600 円であるから，

$$1000x+600y+200z=52600$$

と式を立てた。この両辺を 200 で割ると，

$$5x+3y+z=263 \quad \cdots\cdots ①$$

となる。また，新商品 B，C について，y と z の関係式 [ア] が成り立つ。[ア] に当てはまるものを次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ $y=2z+1$　① $y=2z-1$　② $z=2y+1$　③ $z=2y-1$

①に [ア] を代入すると，関係式 [イ] ができる。[イ] に当てはまる式を次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ $5x+7z=264$　① $5x+7z=266$　② $5x+7y=263$
③ $5x+7z=263$

（第４問は次ページに続く。）

(2)　さらに，2人は次のように考えた。

太郎：花子さんが作った［イ］の式から何がわかるかな。

花子：［イ］の式は次のように変形できるんじゃないかな。

$$7(z-38)=5\times(-x) \quad \cdots\cdots ②$$

すると，5と7は［ウ］だから，$z-38$ は，［エ］となるね。

よって，k を整数として $z-38=5k$ と表せる。

これより，②において，k を用いて，$x=$［オカ］k とできるね。

太郎：それでもいいけど，②の式を直接変形して，

$$z=38-\frac{5}{7}x$$

とすれば同じことがいえるね。

花子：ほんとうだ。そうすると，試行販売したときに売れた合計の個数が最も大きくなる売り方と，合計の個数が最も小さくなる売り方はどうなるのかな。

［ウ］が［エ］の直接の根拠となるとき，［ウ］，［エ］に当てはまるものを次の⓪～⑤のうちから一つずつ選べ。

⓪　整数　　①　互いに素　②　自然数　　③　3の倍数

④　5の倍数　⑤　7の倍数

(3)　(1)より，新商品A，B，Cの売れた個数を x と z のみを用いて表すと，［キ］個となる。このとき，(2)の条件を考えると，

新商品A，B，Cの売れた合計の個数が最も大きいとき，

$x=$［ク］，$y=$［ケコ］，$z=$［サシ］

合計の個数が最も小さいとき，

$x=$［スセ］，$y=$［ソ］，$z=$［タ］

となる。

［キ］に当てはまる式を次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪　$3x+3z-1$　　①　$x+z-1$　　②　$x+3z+3$　　③　$x+3z-3$

④　$x+3z-1$　　⑤　$x-3z-1$

第５問 （選択問題）

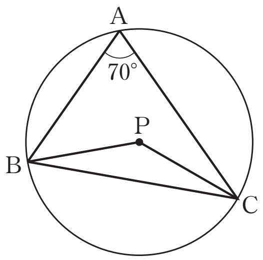
太郎さんと花子さんは，今日，三角形の五心について学習し，授業中に次の課題が出された。

《次回までの課題》
　$\triangle$ABC の内部に点 P があり，$\angle$BAC＝70° であるとき，点 P が
❶　$\triangle$ABC の外心
❷　$\triangle$ABC の垂心
❸　$\triangle$ABC の内心
であるときの $\angle$BPC の大きさを調べなさい。

(1)　授業の課題について，太郎さんと花子さんは次のように話し合っている。

太郎：❶の点 P が $\triangle$ABC の外心のときを考えよう。
　　　授業で習った外心はこうだったね。
　　　《外心》…三角形の 3 つの辺の垂直二等分線は 1 点で交わる。
　　　　　　　その点を三角形の外心という。

花子：まず図を描いてみよう。$\triangle$ABC の外心が点 P のとき，右図のようになるね。これは，習った外心の性質を使わなくても円周角と中心角の関係より，
　　　$\angle$BPC＝2×$\angle$ ア となるから，
　　　$\angle$BPC＝ イウエ ° …(A)とわかるね。



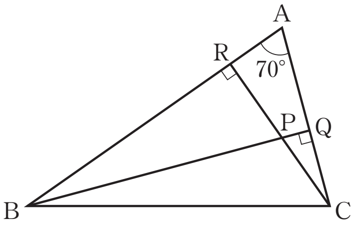
(i)　ア に当てはまるものを次の⓪～④のうちから一つ選べ。

⓪ ABC　① ACB　② PBC　③ PCB　④ BAC

(第５問は次ページに続く。)

太郎：❷の点Ｐが△ABC の垂心となるときを考えよう。授業で習った垂心はこうだね。

《垂心》…三角形の３つの頂点からそれぞれの対辺，またはその延長にひいた垂線は１点で交わる。その点を三角形の垂心という。



右図のように直線 BP，CP が辺 AC，AB と交わる点をそれぞれ Q，R とすると，四角形 ARPQ の内角の和に注目すれば，∠RPQ＝**オカキ**°　…(B)となるね。

花子：次に❸の内心を考えよう。授業で習った内心はこうだね。

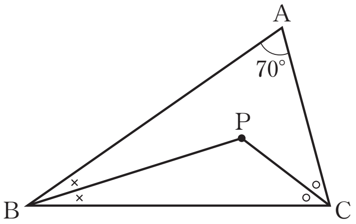
《内心》…三角形の３つの内角の二等分線は１点で交わる。その点を三角形の内心という。

点Ｐが△ABC の内心のとき，

∠PBC＋∠PCB

$= \dfrac{1}{\boxed{\text{ク}}}(\angle ABC + \angle ACB)$

$= \dfrac{1}{\boxed{\text{ク}}}(180^\circ - \angle BAC)$



より，∠BPC＝**ケコサ**°　…(C)である。

このとき，∠BPC＝**シ** の関係式が成り立っているよ。

(ii) **シ** に当てはまるものを次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ 90°＋∠PBC＋∠PCB　　① ∠A＋90°

② $\frac{1}{2}$∠A＋90°　　③ 180°－$\frac{1}{2}$∠A

(第５問は次ページに続く。)

太郎：❶〜❸のとき，大小関係は [ス] のようになるよ。

(iii) [ス] に当てはまるものを，次の⓪〜④より一つ選べ。

⓪ (A)＞(B)＞(C)　① (B)＞(A)＞(C)　② (C)＞(A)＞(B)
③ (B)＞(C)＞(A)　④ (A)＞(C)＞(B)

花子：❶〜❸の点 P が，すべて一致することってあるのかしら。
太郎：△ABC が [セ] のときには，∠BPC＝[ソ] で一致することがわかったよ。

(iv) [セ]，[ソ] に当てはまるものを次の⓪〜⑧より一つずつ選べ。

⓪ 直角三角形　① 直角二等辺三角形　② 鋭角三角形　③ 正三角形
④ 鈍角三角形　⑤ $90°$　⑥ $120°$　⑦ $135°$　⑧ $150°$

(第５問は次ページに続く。)

(2) 次の授業で，先生は，前回の課題に付け加えて，次の課題を出した。

《次の課題》

$\angle A=90^\circ$，$AB=12$，$AC=5$ である $\triangle ABC$ がある。点 P が次のような点であるとき，AP の長さの大小について調べよ。

❶ 点 P が $\triangle ABC$ の外心

❷ 点 P が $\triangle ABC$ の垂心

❸ 点 P が $\triangle ABC$ の内心

太郎：❶のときは，点 P は [タ] であるから，AP＝[チ] …(D)だね。

花子：❷のときは，点 P は [ツ] であるから，AP＝[テ] …(E)だね。

太郎：❸のときは，AP は 1 辺の長さ [ト] の正方形の対角線の長さに等しいから，AP＝[ナ] …(F)だね。

(i) [タ]，[チ]，[ツ]，[テ]，[ト]，[ナ] に当てはまるものを次の⓪～⑦のうちから一つずつ選べ。同じものを 2 回以上使ってもよい。

⓪ 0　① $\frac{13}{3}$　② $\frac{13}{2}$　③ 2　④ $2\sqrt{2}$

⑤ 頂点A　⑥ 斜辺の中点　⑦ 頂点B

花子：これより，AP の長さの大小は [ニ] のように決定するよ。

(ii) [ニ] に当てはまるものを次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ (D)＜(E)＜(F)　① (E)＜(F)＜(D)　② (D)＜(F)＜(E)

③ (E)＜(D)＜(F)　④ (F)＜(D)＜(E)　⑤ (F)＜(E)＜(D)

第10講 実践演習問題 第3問～第5問

第3問

(1) 2回戦で優勝者が決まるのは1回戦で勝った者が2回戦も勝ったときなので，2回戦で優勝者となることができるのは，1回戦に出場しているAまたはB(③)である。

また，2回戦で優勝者が決まるのは，1回戦からAが2連勝またはBが2連勝するときで，その確率は

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

である。

(2) AとBが対戦することを$(A,\ B)$のように表し，対戦の勝者を$\boxed{A}$のように□で囲んで表すとする。

3回戦で優勝者が決まるのは，対戦を1回戦 ⟹ 2回戦 ⟹ 3回戦の順に表すと，

$$(\boxed{A},\ B)\to(A,\ \boxed{C})\to(B,\ \boxed{C})\ \text{または}\ (A,\ \boxed{B})\to(B,\ \boxed{C})\to(A,\ \boxed{C})$$

の2通りのみであり，3回戦で優勝者となれるのはCのみ(②)である。

その確率は

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$$

である。

また，1回戦で優勝者が決まることはない。よって，(1)の結果と合わせて，3回戦以内に優勝者が決まる確率は

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

(3) 4回戦まで試合が続くのは，(2)と同様に表すと

$$(\boxed{A},\ B)\to(A,\ \boxed{C})\to(\boxed{B},\ C)\to(A,\ B)$$

$$(A,\ \boxed{B})\to(B,\ \boxed{C})\to(\boxed{A},\ C)\to(A,\ B)$$

の2通りのみであり，4回戦は必ずAとBの対戦となり，Cは出場できない(②)

また，4回戦で優勝者が決まるのは，

$$(\boxed{A},\ B)\to(A,\ \boxed{C})\to(\boxed{B},\ C)\to(A,\ \boxed{B})$$

$$(A,\ \boxed{B})\to(B,\ \boxed{C})\to(\boxed{A},\ C)\to(\boxed{A},\ B)$$

のいずれかの場合であり，求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{8}$$

（別解）　(2)より，3 回戦以内に優勝者が決まらない確率は $1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

このとき，4 回戦で優勝者が決まる確率は，3 回戦の勝者にかかわらず $\frac{1}{2}$ である。したがって，求める確率は $\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

(4)　(3)より，4 回戦は必ず A と B の対戦となり，これは 1 回戦と同じである。

よって，5 回戦で優勝者が決まっていない場合に，6 回戦で対戦する 2 人を考えるのは，2 回戦で優勝者が決まらず，3 回戦目で対戦する 2 人を考えるのと同じである。

対戦を 1 回戦 $\Longrightarrow$ 2 回戦 $\Longrightarrow$ 3 回戦の順に表すと，(2)より

$(\boxed{A},\ B)\to(A,\ \boxed{C})\to(B,\ C)$ または $(A,\ \boxed{B})\to(B,\ \boxed{C})\to(A,\ C)$

であるから，①または②である。

また，5 回戦が終了しても優勝者が決まらない確率は，

$\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}+\frac{1}{32}=\frac{1}{16}$

(5)　(1)～(3)より，A が 4 回戦以内に優勝できるのは 2 回戦か 4 回戦。4 回戦で優勝者が決まっていない場合は，次に A が優勝できるのは 5 回戦である。

2 回戦で優勝するとき

$(\boxed{A},\ B)\to(\boxed{A},\ C)$ であり，その確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

4 回戦で優勝するとき

$(A,\ \boxed{B})\to(B,\ \boxed{C})\to(\boxed{A},\ C)\to(\boxed{A},\ B)$ であり，その確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

5 回戦で優勝するとき，

$(\boxed{A},\ B)\to(A,\ \boxed{C})\to(\boxed{B},\ C)\to(\boxed{A},\ B)\to(\boxed{A},\ C)$ であり，その確率は，

$\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$

したがって，5 回戦以内に A が優勝者と決まる確率は $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=\frac{11}{32}$

また，5 回戦以内に B が優勝する確率は，同様に $\frac{11}{32}$ である。

さらに，5 回戦が終了しても優勝者が決まらない確率は，(4)より $\frac{1}{16}$ である。

したがって，5 回戦以内に C が優勝する確率は　$1-\left(\frac{11}{32}+\frac{11}{32}+\frac{1}{16}\right)=\frac{8}{32}$

ゆえに，5 回戦以内に優勝する確率が最も高いのは A，B(③)である。

第4問

(1)　新商品Bの売れた個数は，新商品Cの売れた個数の2倍より1個少ないので，

$y=2z-1$(➊)と表せる。

①：$5x+3y+z=263$ に $y=2z-1$ を代入すると，

$$5x+3(2z-1)+z=263$$

よって，$5x+7z=266$（➊）

(2)　$5x+7z=266$ より $7(z-38)=5\times(-x)$

5と7は互いに素(➊)であるから，$z-38$ は5の倍数(➍)である。

よって，整数 k を用いて，$z-38=5k$ すなわち $z=5k+38$ と表すことができる。

このとき，$7\cdot5k=5\times(-x)$ より $x=-7k$ と表すことができる。

(3)　(1)より $y=2z-1$

よって，商品の売れた個数を x，z のみを用いて表すと

$$x+y+z=x+(2z-1)+z=x+3z-1\text{(個)}$$（➍）

さらに x，z は $5x+7z=266$ を満たす自然数であり，(2)より $x=-7k$，すなわち

x は7の倍数であることより，

$(x,\ z)=(7,\ 33),(14,\ 28),(21,\ 23),(28,\ 18),(35,\ 13),(42,\ 8),(49,\ 3)$

に限られる。

このとき

$x+3z-1$ の値が最大になるのは $(x,\ z)=(7,\ 33)$ のときで，

このとき　$y=2\cdot33-1=65$

$x+3z-1$ の値が最小になるのは $(x,\ z)=(49,\ 3)$ のときで，

このとき　$y=2\cdot3-1=5$

したがって，新商品A，B，Cの売れた合計の個数が

最も大きいとき $x=7$，$y=65$，$z=33$

最も小さいとき $x=49$，$y=5$，$z=3$

となる。

第５問

(1)

(i) 円周角と中心角の関係を用いて，

$\angle BPC = 2\times\angle BAC$ (④)

すなわち，$\angle BPC = 2\times 70^\circ = 140^\circ$

四角形 ARPQ について，$\angle ARP = \angle AQP = 90^\circ$，$\angle RAQ = 70^\circ$ であるから，

$\angle RPQ = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 70^\circ) = 110^\circ$

角の二等分線の性質から，

$$\angle PBC + \angle PCB = \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB)$$

$$= \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAC)$$

より，$\angle BPC = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - 70^\circ) = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$

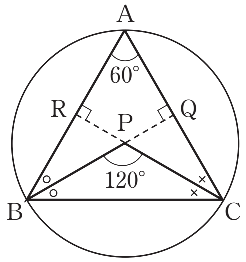
(ii) このとき，

$$\angle BPC = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAC) = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}\angle A + 90^\circ$$ (②)

が成立している。

(iii) (A)…140°，(B)…110°，(C)…125° より，(A)＞(C)＞(B) (④)

(iv) 点 P が △ABC の外心のとき　$\angle BPC = 2\times\angle BAC$



点 P が △ABC の内心のとき　$\angle BPC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC$

点 P が △ABC の垂心のとき

$\angle RPQ = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + \angle BAC)$

$= 180^\circ - \angle BAC$ より

$\angle BPC = 180^\circ - \angle BAC$

△ABC の外心と内心が一致するとき，$2\times\angle BAC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC$ より

$\angle BAC = 60^\circ$，$\angle BPC = 120^\circ$

このとき，$\angle BPC = 180^\circ - \angle BAC$ が成立し，点 P は △ABC の垂心である。

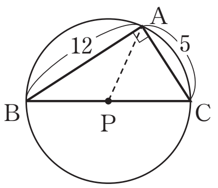
また，PB＝PC，$\angle BPC = 120^\circ$ より，△BPC は PB＝PC の二等辺三角形である。

よって，$\angle PBC = \angle PCB = 30^\circ$ であり，$\angle ABC = \angle ACB = 60^\circ$ である。

したがって，△ABC が正三角形(③)のとき，△ABC の外心，内心，垂心がすべて一致し，$\angle BPC = 120^\circ$ (⑥)である。

(2)　$\angle A=90^\circ$，$AB=12$，$AC=5$ より，三平方の定理から

$BC=13$



(i)　点 P が △ABC の外心のとき，$\angle BAC=90^\circ$ であることから，辺 BC が △ABC の外接円の直径であり，点 P は直角三角形 ABC の斜辺の中点(⑥)である。

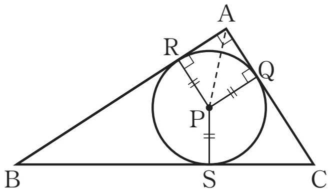
よって，$AP=BP=CP=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{13}{2}$ (②)

点 P が △ABC の垂心であるとき，点 P は頂点 A(⑤)と一致し，$AP=0$ (⓪)である。

点 P が △ABC の内心のとき，$PR\perp AB$，

$PQ\perp AC$ かつ $PQ=PR$ より

四角形 ARPQ は正方形である。



その 1 辺を r とすると，$AR=AQ=r$，

$CQ=CS=5-r$，$BR=BS=12-r$ であるから

$$(5-r)+(12-r)=13$$

$$2r=4$$

$$r=2\ (③)$$

また，AP は正方形 ARPQ の対角線である。

よって，$AP=PQ\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ (④)

(ii)　したがって，AP の長さは

❶のとき，$\dfrac{13}{2}=6.5$　　❷のとき，0　　❸のとき，$2\sqrt{2}=\sqrt{8}=2.\cdots\cdots$

よって，(E)＜(F)＜(D) (①)